Schwingungen

harmonische Schwingung $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$; x_0: Amplitude

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$; ω_0: Kreisfrequenz; φ_0: Nullphasenwinkel

harmon. Federoszillator $m\ddot{x} + kx = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

mathematisches Pendel $l\ddot{\gamma} + g \cdot \sin\gamma = 0$; für kleine $\gamma \approx \sin\gamma$ ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

physikalisches Pendel $J\ddot{\gamma} + l_S \cdot mg \cdot \sin\gamma = 0$; für kleine $\gamma \approx \sin\gamma$ ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{l_s mg}{J}}$

l_s: Abstand Schwerpunkt - Aufhängepunkt

elektrischer Schwingkreis $L\ddot{I} + \frac{1}{C} I = 0$ (hier R=0) ; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Überlagerung zweier harm. Schwingungen mit der Methode der rotierenden Vektoren:

Für $\omega_1 = \omega_2$ $\Rightarrow$ $x_{0ges} = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$$\tan\varphi_{0ges} = \frac{x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2}{x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2}$$

$x_{01} = x_{02}$: $x_{ges}(t) = 2x_{01}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\cos(\omega \cdot t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})$

Schwebung ($x_{01}=x_{02}$; $\omega_1 \approx \omega_2$) $x_{ges}(t) = 2x_{01}\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$

Schwebungskreisfrequenz $\omega_S = |\omega_1 - \omega_2|$

ganzzahliges Verhältnis ω_1/ω_2 anharmonische Schwingung $x(t) = x(t + T)$

Fourieranalyse Jede anharmonische Schwingung lässt sich in eine Summe harmonischer Schwingungen zerlegen.

gekoppelte Federschwinger mit Federkonstanten k bzw. k_K:

Eigenschwingungen $\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_K}{m}}$

harm. Federoszillator mit Reibung $m\ddot{x} + F_R + kx = 0$ **; F_R: Reibkraft**

1. harm. Federoszillator mit Coulombscher Reibkraft $F_R = \mu \cdot F_N$ unabhängig von v

linear abklingende Amplitude: $x_{0,n+1} - x_{0,n} = \frac{4F_R}{k}$

2. viskose Reibkraft $F_R = bv = b\dot{x}$

Gedämpfte Schwingung $x(t) = x_0 \cdot \exp(-\delta \cdot t) \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi)$

($\delta<\omega_0$) $\delta = \frac{b}{2m}$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

logarithmisches Dekrement $\delta \cdot T = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$

Phasenwinkel φ und x_0 folgen aus den Anfangsbedingungen x(0) und v(0).

Kriechfall **($\delta > \omega_0$)** $x(t) = x_{01} \cdot \exp(-\delta_1 \cdot t) + x_{02} \cdot \exp(-\delta_2 \cdot t)$

$\delta_{1,2}' = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

aperiodischer Grenzfall

($\delta = \omega_0$) $x(t) = x_0 \cdot (1 + \delta \cdot t) \cdot \exp(-\delta \cdot t)$;

analoge Schwinger:

Drehspulinstrument $J\ddot{\gamma} + b'\dot{\gamma} + k'\gamma = 0$

Elektrischer Schwingkreis $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0$

Analogieschluß $m \leftrightarrow L$; $b \leftrightarrow R$; $k \leftrightarrow 1/C$

($\delta<\omega_0$) $\delta = \frac{R}{2L}$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Erzwungene Schwingungen $m\ddot{x} + F_R + kx = F_0 \cos(\omega \cdot t)$; F_0: Erregerkraftamplitude

viskos gedämpft $F_R = b \cdot v$ nach dem Einschwingen $x = x_0 \cos(\omega \cdot t - \varphi)$

Amplitude $$x_0 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\delta\omega\right)^2}}$$

Phase $$\tan\varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Resonanzbedingung $(\delta << \omega_0)$: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega_d < \omega_0$ (für $F_0 \neq F_0(\omega)$)

Güte $$Q = \frac{x_0(\omega_R)}{x_0(\omega \to 0)} = \frac{\omega_0^2}{2\delta\omega_d} \approx \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Wellen

"Longitudinalwelle" (L) bzw. "Transversalwelle" (T)

harm. ebene Welle in x-Richtung $$u(t,x) = u_0 \cos\left[(\omega \cdot t - kx) + \varphi\right] = u_0 \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right]$$

Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\leftrightarrow$ Wellenlänge λ, Periodendauer T

Phasengeschwindigkeit $$c = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{k}$$

Energiedichte einer Welle $$w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2}\rho u_0^2 \omega^2$$

Intensität $I = w \cdot c$ (Energiestromdichte)

ebene Quelle $I = \frac{P}{A}$ (ebene Wellen)

Punktförmige Quelle $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ (Kugelwellen)

Absorption von Wellen $I(x) = I_0 \exp[-\mu x]$; μ: Absorptionskoeffizient

Interferenz (gleiche Richtung) $u_1(t,x) = u_{01}\cos(\omega t - kx)$;

$$u_2(t,x) = u_{02}\cos(\omega t - kx + \varphi) = u_{02}\cos\left(\omega t - kx + 2\pi \cdot \frac{\Lambda}{\lambda}\right)$$

Λ: Gangunterschied

Für $u_{01} = u_{02} = u_0$: $$u_{ges}(t,x) = 2u_0 \cos\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\pi\right)\cos\left(\omega t - kx + \frac{\Lambda}{\lambda}\pi\right)$$

stehende Welle durch Reflexion

an Medium bei x = 0: $$u(t,x) = 2u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Phasensprung: dünneres Medium $\varphi = 0$; dichteres Medium $\varphi = \pi$

Gruppengeschwindigkeit v_g : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}$; $v_g < c$: normale Dispersion

Eindimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Wellentyp	**Phasengeschwindigkeit c =**	**Bemerkung**
(T) gespannte Saite	$\sqrt{\frac{F}{A \cdot \rho}}$	F: Spannkraft A: Saitenquerschnitt
(L) dünner Stab ($r << \lambda$)	$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	E: Elastizitätsmodul ρ: Dichte
Torsionswelle Stab (Scherwelle Festkörper)	$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	G: Schubmodul
(L) Festkörper	$\sqrt{\frac{K + \frac{4}{3} G}{\rho}}$	K: Kompressionsmodul
(L) Flüssigkeiten	$\sqrt{\frac{K}{\rho}}$	
(L) Gase	$\sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}}$ (ideales Gas: $\sqrt{\frac{\gamma \cdot R}{M_{mol}} \cdot T}$)	γ: Isentropenexponent p: Druck
Wasserwellen Dispersion:	flaches Wasser: $\sqrt{g \cdot h}$ tiefes Wasser: $\sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho \cdot \lambda}}$ ($h >> \lambda$)	Für h: Wassertiefe < $\lambda/2\pi$ σ(Wasser) = 0,07 $N \cdot m^{-1}$
elektromagnetische Wellen in Materie	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}$ Brechungsindex $n = \frac{c_{Luft}}{c} \approx \frac{c_0}{c}$	im Vakuum: $c_0 = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s

Akustik:

Schallgeschwindigkeit in Luft: (bei 20°C: c = 344 m/s) $c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R}{M_{mol}} \cdot T}$

Schallwechseldruck $p(t,x) = p_S + \tilde{p}_0 \cos\left[2\pi f \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right] = p_S + \tilde{p}$

p_S: statischer Gasdruck; $\tilde{p}_0$: Schallwechseldruckamplitude

Schallschnelle $v(t,x) = \frac{1}{\rho c}\tilde{p}(t,x) = \frac{1}{Z}\tilde{p}(t,x)$;

$Z = \rho c$: Schallwiderstand [Z(Luft, 20°C) = 416 kg·m^{-2}·s^{-1}]

Schallintensität $I = \frac{1}{2}\tilde{v}_0\tilde{p}_0 = v_{eff}\,p_{eff} = \frac{p_{eff}^2}{Z}$

Effektivwerte $p_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{p}_0$; $v_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0$

Schallintensitätspegel $L_I = 10 \cdot \lg\frac{I}{I_0}$ dB ; $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$

Lautstärke in [phon] $L_S = 10 \cdot \lg\frac{I(1000\,Hz)}{I_0}$; $[L_S]$= phon

Lautstärke in phon = Schallpegel in dB bei 1000 Hz

Bewerteter Schallpegel siehe DIN 45633: Bewertungskurven dB(A), dB(B), dB(C)

Lautheit in [sone] $S = 2^{0{,}1\cdot(L_S-40)}$; [S] = sone

Doppler-Effekt bei Schall:

bewegte Schallquelle	zum Empfänger hin	vom Empfänger weg
(Frequenz f_0)	$f = \frac{f_0}{1-\frac{v_S}{c}}$	$f = \frac{f_0}{1+\frac{v_S}{c}}$
bewegter Empfänger	zur Schallquelle hin	von der Schallquelle weg
	$f = f_0\left(1+\frac{v_E}{c}\right)$	$f = f_0\left(1-\frac{v_E}{c}\right)$

Geschwindigkeiten v_S bzw. v_E relativ zur Luft

Vorsicht: Doppler-Effekt bei Licht (elektromagnetischen Wellen):

bei Annähern $f = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$; bei Entfernen $f = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

Prinzip nach Huygens: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Elementarwelle betrachtet werden.

Brechungsgesetz (1) $\frac{\sin\alpha_1}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_2}$

1 Geometrische Optik

Reflexionsgesetz	$\alpha_1 = \alpha_{1r}$; Einfallswinkel = Reflexionswinkel
Lichtintensitäten I	$I_R + I_T + I_A = I_0$; Reflexion, Transmission, Absorption
Brechungsindex	$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$; Per Definition n(Vakuum) = 1
Brechungsgesetz (2)	$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$; n: Brechungsindex
Totalreflexion	$\alpha_t = \arcsin\frac{n_1}{n_2}$; $n_1 < n_2$
normale Dispersion	$n = n(\lambda)$; "rot wird schwächer gebrochen als blau"
Brechkraft einer Linse	$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$; [D] = 1/m = Dioptrie
Vorzeichenkonvention	$r_1 > 0$; $r_2 < 0$: Bi-Konvex (Sammellinse: Brennweite $f > 0$)
z.B.	$r_1 < r_2 < 0$: Konkav-Konvex (Sammellinse)
Abbildungsgleichung	$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$; $f \gtrless 0$: Brennpunkt auf $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Bild}-}{\text{Gegenstands}-}$ seite
Abbildungsmaßstab	$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$
physiologischer Grenzwinkel	1' d.h. Punktabstand 0,2 mm in 1 m Entfernung
deutliche Sehweite	$s_0 = 25$ cm
Vergrößerung	$V = \frac{\tan(\varepsilon/2)}{\tan(\varepsilon_0/2)}$
	$V \approx$ (Sehwinkel mit Instr./Sehwinkel ohne Instr.)
Lupe	Normalvergrößerung $V_L = \frac{s_0}{f}$
	Vergrößerung bei virtuellem Bild $V_L' = \frac{s_0}{g} = V_L + 1$
Mikroskop	$V_M = \frac{t \cdot s_0}{f_1 \cdot f_2}$; (t: optische Tubuslänge)
astronomisches Fernrohr	$V_F = \frac{f_1}{f_2}$; (f_1: Objektivbrennweite, f_2: Okularbrennweite)

2 Wellenoptik

Kohärenzlänge $L \approx \frac{c}{\Delta f} = c \cdot \tau$

Δf: Breite des Frequenzbandes; τ: Zeitdauer des Emissionsaktes

optische Weglänge $L = \int_{P1}^{P2} n(s)ds$; In einem homogenen Medium: $L = n \cdot s$

destruktive Interferenz $\Lambda = n_2 s_2 - n_1 s_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$; m = 0, 1, 2, ...

Interferenz an dünnen Schichten (Luft/Schicht n_S/Basiswerkstoff n_B mit $n_S < n_B$):

$$\Lambda = 2d\sqrt{n_S^2 - \sin^2\alpha} \text{ (Einfallswinkel } \alpha)$$

Beugung am Spalt (Breite b) in Richtung γ:

Minima bei $\sin\gamma_z = z \cdot \frac{\lambda}{b}$; z = 1, 2 , 3, ...

Beugung am Gitter (Gitterkonstante g) in Richtung γ:

Hauptmaxima bei $\sin\gamma_m = m \cdot \frac{\lambda}{g}$; m = 0, 1, 2 , 3, ...

Auflösungsvermögen:

Beugung an Lochblende mit Lochdurchmesser d (Objektiv mit Durchmesser d):

Minima bei $\sin\gamma_z = k_z \cdot \frac{\lambda}{d}$ ($k_1 = 1{,}22$; $k_2 = 2{,}23$;...)

Auflösung zweier Objektpunkte wenn $\gamma \geq 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{d}$

Auflösungsvermögen Mikroskop: Mindestabstand für zwei leuchtende Objektpunkte

$x_{min} = 0{,}61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin\sigma}$ (σ: halber Öffnungswinkel Objektiv)

Polarisationswinkel $\alpha_B = \arctan n$ (**Brewsterwinkel)**

Doppelbrechung

Der $\begin{matrix}\text{ordentliche}\\ \text{außerordentliche}\end{matrix}$ Lichtstrahl ist $\begin{matrix}\text{senkrecht}\\ \text{parallel}\end{matrix}$ zum Strahl-Hauptschnitt linear polarisiert.

Optische Weglänge: $L_o = n_o \cdot s$ bzw. $L_{ao} = n_{ao} \cdot s$

3 Quanten

Energie eines Photons $E_\gamma = h \cdot f$

Plancksches Wirkungsquantum $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js $= 4{,}1357 \cdot 10^{-15}$ eVs

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

(äußerer) Fotoeffekt $E_{kin} = h \cdot f - W_A$ (W_A: Austrittsarbeit)

Elementarladung $e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C

Impuls eines Photons $p = mc = \dfrac{h}{\lambda}$

de Broglie Wellenlänge $\lambda = \dfrac{h}{p}$

relativistische Effekte

bewegte Masse $$m(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot m_0 = \gamma \cdot m_0$$

(m_0: Ruhemasse; γ: relativistischer Faktor)

kinetische Energie eines Körpers $E_{kin} = mc^2 - m_0c^2$

Ruheenergie $E_0 = m_0c^2$

Gesamtenergie eines Körpers $E = mc^2$

Energiezustände in Atomen

Wasserstoffatom $$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -R_\infty \frac{1}{n^2}$$; n: Hauptquantenzahl

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10\text{-}12\ \dfrac{As}{Vm}$; $R_\infty = 1{,}0974 \cdot 10^7\ m^{-1}$

Strahlender Übergang zwischen stationären Energiezuständen:

$$hf = E_k - E_i$$

Bahndrehimpuls $\left|\vec{L}\right| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$; $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

l: Bahndrehimpulsquantenzahl (Nebenquantenzahl)

Richtungsquantisierung $L_z = m_l \hbar$; $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$

m_l: magnetische Quantenzahl (Richtungsquantenzahl)

Eigendrehimpuls (Spin) $S_z = m_S \hbar$; $m_S = \pm \frac{1}{2}$

m_S: magnetische Spinquantenzahl

Paulisches Ausschließungsprinzip:

Innerhalb eines Atoms dürfen keine Elektronen in allen 4 Quantenzahlen (n, l, m_l, m_s) übereinstimmen.

Röntgenstrahlung

Bremsstrahlung $\lambda_{min} = \frac{hc}{eU_B + W_A}$

Moseley Gesetz (K_α-Linie) $\frac{1}{\lambda} = R_\infty (Z-1)^2 \cdot \frac{3}{4}$; Z: Kernladungszahl

K-Linien allgemein: $\frac{1}{\lambda} = R_\infty (Z-1)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Schwächung der Strahlung $I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$; x: Materialdicke

Abschwächungskoeffizient $\mu = \text{const} \cdot \frac{\rho \cdot Z^4}{(hf)^3 A}$ $\left(\frac{\mu}{\rho} \propto Z^3\right)$

A: Massenzahl; Z: Kernladungszahl; ρ: Dichte

Atomkerne

Nukleonenzahl A = Kernladungszahl Z + Neutronenzahl N

atomare Masseneinheit $1\,u = 1{,}660539 \cdot 10^{-27}$ kg (= 1/12 der Masse eines ^{12}C-Atoms)

Massendefekt: $\Delta m_K = Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m_K$; m_K: Kernmasse

Bindungsenergie Kern: $E_B = \Delta m_K \cdot c^2$; 1 u entspricht 931 MeV

Aktivität $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$; λ: Zerfallskonstante

Zerfallsgesetz: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Halbwertszeit $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$